



TD n°9: Promenade

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Exercice 1. Formules d'aire.

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une fonction analytique sur \mathbb{D} , qu'on suppose bornée et injective.

1. Calculer le déterminant jacobien de f vue comme un difféomorphisme de \mathbb{D} sur son image $f(U)$.

La différentielle de f en z est la multiplication par $f'(z)$. Un rapide calcul révèle que le déterminant de la multiplication par $a \in \mathbb{C}$ vue comme application \mathbb{R} -linéaire est $|a|^2$, d'nc le déterminant jacobien de f en z est $|f'(z)|^2$.

2. Démontrer la formule de l'aire

$$\text{Aire}[f(\mathbb{D})] = \pi \sum_{n \geq 0} n |a_n|^2.$$

On applique la formule du changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_{f(\mathbb{D})} dx dy &= \int_{\mathbb{D}} |f'(x + iy)|^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m, n \geq 0} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} m \bar{a}_m r^{m-1} e^{-i(m-1)\theta} r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \sum_{m, n \geq 0} n m a_n \bar{a}_m r^{m+n-1} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \sum_{n \geq 0} n |a_n|^2 r^{2n-1} dr \\ &= \pi \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2. \end{aligned}$$

On rappelle la formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe : pour f, g fonctions C^1 sur K compact à bord C^1 par morceaux, on a

$$\int_{\partial K} f dz + g d\bar{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy.$$

3. Soit K un compact à bord C^1 par morceaux. Démontrer que

$$\text{Aire}[K] = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z} dz.$$

On applique la formule de Stokes à $f = \bar{z}, g = 0$ et on obtient

$$2i \int_K dx dy = \int_{\partial K} \bar{z} dz$$

qui est précisément l'égalité cherchée.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

4. Soit à présent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ une fonction analytique au voisinage du cercle γ_r de rayon r , injective sur γ_r . Soit K_r le compact du plan dont le bord est $f(\gamma_r)$. Démontrer l'égalité

$$\text{Aire}[K_r] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |a_n|^2 r^{2n}.$$

On applique la formule de l'aire à ∂K paramétrée par $z = f(re^{i\theta})$, donc $\bar{z} = \overline{f(re^{i\theta})}$ et $dz = ire^{i\theta} f'(re^{i\theta}) d\theta$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_K dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} f'(re^{i\theta}) r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \bar{a}_n r^n e^{-ni\theta} m a_m r^{m-1} e^{(m-1)i\theta} r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} m \bar{a}_n a_m r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |a_n|^2 r^{2n} \end{aligned}$$

Exercice 2. Un calcul de somme.

1. Démontrer que $\tan(x + iy) = \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$ puis démontrer que les solutions de l'équation $\tan(z) = z$ sont toutes réelles. On note les solutions strictement positives $(\lambda_n)_{n \geq 1}$.

Le calcul pour $\tan(x + iy) = \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$ est assez laborieux. On peut soit le faire explicitement, en utilisant les formules $\sin(iy) = i \sinh(y)$, $\cos(iy) = \cosh(y)$, et toutes les formules de duplication qui en découlent, soit calculer les dérivées partielles de $\frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$, vérifier que cette fonction satisfait aux équations de Cauchy-Riemann et vérifier qu'elle coïncide avec la tangente sur \mathbb{R} (moins les pôles). On ne détaille pas les calculs, qui sont longs mais élémentaires.

On déduit de l'expression que si $z = x + iy$ est une solution de l'équation $\tan z = z$ on a $x \sinh(2y) = y \sin(2x)$. Ainsi, si $xy \neq 0$ on a $|y \sin(2x)| < |2xy| < |x \sinh(2y)|$ et l'égalité précédente est impossible. Si $x = 0$ et $y \neq 0$ on a $\tan(iy) = i \tanh y = iy$ ce qui est impossible puisque $|\tanh(y)| < |y|$. Ceci conclut que les racines de $\tan z = z$ sont réelles.

2. On pose $f(z) = \sin(z) - z \cos(z)$. Démontrer en intégrant $\frac{f'(z)}{z^2 f(z)}$ sur un contour bien choisi que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10}.$$

Remarquons que $n\pi - \frac{\pi}{2} < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$. Le contour carré est donc le contour habituel de sommets $\pm(N\pi + \pi/4) \pm (N + \pi/4)i\pi$, on passe la preuve que $g(z) = \frac{f'(z)}{z^2 f(z)} = \frac{\tan(z)}{z(\tan(z) - z)} = \frac{\sin(z)}{z(\sin(z) - z \cos(z))}$ est un $O(N^{-2})$ sur ce contour.

Reste simplement à calculer les résidus. Les pôles sont 0, qui est un pôle triple, et les $\pm\lambda_n$, qui sont simples. $\frac{f'}{f}$ a un résidu de 1 en $\pm\lambda_n$ car $\pm\lambda_n$ est un zéro simple de f , et donc le résidu de g en $\pm\lambda_n$ est $\frac{1}{\lambda_n^2}$. Pour calculer le résidu en 0, il faut calculer le terme de degré 1 dans le développement en série de Laurent de f'/f , on ne détaillera pas ce calcul, on trouve $-1/5$. En intégrant, on obtient

$$2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{5} + O(N^{-1})$$

et le résultat recherché tombe en prenant $N \rightarrow \infty$.

3. Démontrer que pour tout $k \geq 1$ entier, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^{2k}} \in \mathbb{Q}.$$

Il suffit de refaire la même chose que dans la question précédente, mais avec la fonction $g_k(z) = \frac{f'(z)}{z^{2k}f(z)}$. Les pôles sont toujours des pôles simples aux $\pm\lambda_n$ et un pôle d'ordre $2k+1$ en 0. Le résidu en $\pm\lambda_n$ est $\frac{1}{\lambda_n^{2k}}$ et le résidu en 0 est le coefficient d'ordre $2k-1$ dans le développement en série de Laurent de f'/f au voisinage de 0. Comme f est à coefficients rationnels, f'/f l'est aussi, ce qui conclut.

4. Démontrer, pour $a \in [-1, 1]$, l'égalité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2 \sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3 - 3a}{20}.$$

Le fait que $\frac{\sin(az)}{\sin(z)}$ est bornée sur le contour choisi n'est pas immédiat. Calculons

$$|\sin(x+iy)|^2 = |\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)|^2 = \sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y).$$

En écrivant $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, on trouve

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2(x)\cosh^2(y) + \sinh^2(y) - \sin^2(x)\sinh^2(y) = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$

car $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$. On majore $\frac{\sin(az)}{\sin(z)}$ sur le carré de coins $\pm(N+1/4)\pi \pm i(N+1/4)\pi$: sur les côtés verticaux $z = \pm(N+1/4)\pi + it$, on a

$$\begin{aligned} \frac{|\sin(az)|^2}{|\sin(z)|^2} &= \frac{\sin^2(\pm aN\pi \pm a\pi/4) + \sinh^2(at)}{\sin^2(\pm N\pi \pm \pi/4) + \sinh^2(t)} \\ &\leq \frac{1 + \sinh^2(at)}{\frac{1}{2} + \sinh^2(t)} \end{aligned}$$

qui est bornée sur \mathbb{R} .

Similairement, sur les côtés horizontaux, on a $z = t \pm i(N+1/4)\pi$

$$\begin{aligned} \frac{|\sin(az)|^2}{|\sin(z)|^2} &= \frac{\sin^2(at) + \sinh^2(\pm a(N+1/4)\pi)}{\sin^2(\pm t) + \sinh^2(\pm a(N+1/4)\pi)} \\ &\leq \frac{1 + \sinh^2(a(N+1/4)\pi)}{\sinh^2((N+1/4)\pi)} \end{aligned}$$

qui est également borné quand $N \rightarrow \infty$.

On a donc $\int_{\gamma_N} \frac{\sin(az)}{\sin(z)} \frac{f'(z)}{z^2 f(z)} dz \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$, et la somme des résidus de la fonction est donc nulle.

Comme $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z \tan(z)}{\tan(z)-z}$, on a

$$\frac{\sin(az)}{\sin(z)} \cdot \frac{\sin(z)}{z(\sin(z) - z \cos(z))} = \frac{\sin(az)}{z(\sin(z) - z \cos(z))}$$

et ses pôles sont exactement les $\pm\lambda_n$, simples, et 0, triple. Le résidu en λ_n est $\frac{\sin(\lambda_n a)}{\sin(\lambda_n)\lambda_n^2}$, et il faut calculer le résidu en 0. Encore une fois, il s'agit de faire un développement limité. Au dénominateur, on a $\sin(z) - z \cos(z) = -\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^5}{24} + o(z^6) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} + o(z^6)$. On se ramène donc à calculer le terme d'ordre 2 dans

$$\frac{z^3 \sin(az)}{\sin(z) - z \cos(z)} = \frac{a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{30}z^2 + o(z^3)}.$$

On calcule brutalement

$$\begin{aligned} \frac{a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{30}z^2 + o(z^3)} &= -3 \frac{a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)}{1 - \frac{1}{10}z^2 + o(z^3)} \\ &= 3 \left(a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3) \right) \left(1 - \frac{1}{10}z^2 + o(z^3) \right) \\ &= 3a - \frac{3a}{10}z^2 + \frac{a^3}{2}z^2 + o(z^3) \\ &= \frac{3a - 5a^3}{10}. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$2 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2 \sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3 - 3a}{10}.$$

Exercice 3. Principe de l'argument généralisé et inversion locale.

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, on considère $f \in \mathcal{M}(U)$ et $g \in \mathcal{O}(U)$.

1. Démontrer le principe de l'argument généralisé : si γ est un lacet simple orienté dans le sens direct, alors

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{f(\alpha)=0} v_{\alpha}(f) g(\alpha)$$

où la somme porte sur les zéros de f à l'intérieur de γ et $v_{\alpha}(f)$ est l'ordre d'annulation de f en α (négatif si α est un pôle).

On sait que f'/f a un pôle simple en chaque zéro et pôle de f avec $\text{Res}_{\alpha}(f'/f) = v_{\alpha}(f)$, et comme g n'a pas de pôle en α on a

$$\text{Res}_{\alpha} \left(g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = g(\alpha) \text{Res}_{\alpha} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) = g(\alpha) v_{\alpha}(f).$$

De là, on utilise le théorème des résidus pour conclure.

2. On suppose à présent f holomorphe. Soit $a \in U$ tel que $f'(a) \neq 0$: justifier qu'il existe un disque ouvert $a \in D \subseteq U$ sur lequel f est injective et démontrer que la formule

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

définit une fonction holomorphe sur $f(D)$.

On voit f comme une application C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , sa différentielle en a est la multiplication par $f'(a)$, vue comme application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Cette application étant inversible, le théorème d'inversion locale C^1 nous assure l'injectivité de f .

Il est également possible de faire une preuve plus pédestre en utilisant le développement en série entière de f au voisinage de a : quitte à enlever $f(a)$, on peut écrire $f(z) = (z - a)f'(a) + (z - a)^2 g(z)$. Si z est suffisamment proche de a , le terme d'ordre 2 sera négligeable devant celui d'ordre 1, et comme le terme d'ordre 1 est injectif, la fonction le sera. Le lecteur peut s'amuser à écrire cet argument proprement, avec les bornes nécessaires.

L'holomorphie de la fonction donnée par la formule

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

se démontre avec des techniques standard d'inversion limite-intégrale ou de dérivation sous le signe intégral. On peut aussi vérifier que cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{f(\partial D)} \frac{dz}{z - w}$$

et comme $f(\partial D)$ est une courbe simple, on peut se ramener à la formule de Cauchy.

3. Démontrer que cette fonction est une réciproque holomorphe à $f|_D$. On a prouvé le théorème d'inversion locale en version holomorphe, à savoir qu'une fonction holomorphe de dérivée non-nulle admet localement un inverse holomorphe.

Les pôles de $\frac{f'(z)}{f(z) - w}$ sont précisément les z tels que $f(z) = w$. Sur D , f est injective et donc il n'y a qu'un seul pôle, d'ordre 1 car $f(z) - w$ est un zéro d'ordre 1 (la dérivée d'une fonction holomorphe injective n'est jamais nulle). Par le principe de l'argument généralisé, la valeur de l'intégrale est donc l'unique z tel que $f(z) = w$, autrement dit, c'est $f^{-1}(w)$.

4. Redémontrer ce théorème à partir du théorème d'inversion locale C^1 .

Le théorème d'inversion locale C^1 prévoit que si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction C^1 dont la différentielle est inversible en $a \in U$, alors f restreinte à un voisinage V de a devient un difféomorphisme.

On obtient donc une réciproque à $f|_V$, mais est-elle holomorphe ? La réponse se trouve dans la formule

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Si on pose $g = f^{-1}$ donnée par le théorème, sa dérivée en $f(a)$ est $(df_a)^{-1}$. Reste seulement à observer que l'inverse d'une application \mathbb{C} -linéaire bijective de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dans lui-même est encore \mathbb{C} -linéaire, et on a prouvé que dg_b est \mathbb{C} -linéaire pour tout $b \in f(V)$, autrement dit, g est holomorphe.

Exercice 4. Autour de la transformée de Mellin

On définit, pour f fonction mesurable de $\mathbb{R}_{>0}$ dans \mathbb{C} :

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge absolument.

1. Démontrer que si $\mathcal{M}f(s)$ converge absolument, alors $\mathcal{M}f(s')$ converge également pour $\Re(s) = \Re(s')$. En déduire que $\mathcal{M}f$ définit une fonction sur une bande (potentiellement vide) $a < \Re(s) < b$.

$|x^{s-1}f(x)| = x^{\Re(s)-1}|f(x)|$ donc la convergence est indépendante de $\Im(s)$.

2. Démontrer $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur cette bande.

La convergence absolue permet d'échanger dérivée et intégrale.

3. Démontrer que pour $a < \sigma < b$, $t \mapsto \mathcal{M}f(\sigma + it)$ est la transformée de Fourier de $y \mapsto e^{-\sigma y} f(e^{-y})$

On fait un changement de variable $x = e^{-y}$, qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(\sigma + it) &= \int_0^\infty x^{\sigma+it} f(x) \frac{dx}{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sigma+it)y} f(e^{-y}) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma y} f(e^{-y}) e^{-ity} dy. \end{aligned}$$

4. En déduire la formule d'inversion de Mellin : si $\mathcal{M}f$ converge sur $a < \Re(s) < b$, qu'on a $a < \sigma < b$ et que $t \mapsto \mathcal{M}f(\sigma + it)$ est L^1 , alors pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma+i\mathbb{R}} x^{-s} \mathcal{M}f(s) ds.$$

On applique la formule d'inversion de Fourier L^1 à $\sigma \in]a, b[$ fixé :

$$e^{-\sigma y} f(e^{-y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} \mathcal{M}f(\sigma + it) dt.$$

En posant $x = e^{-y}$, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x^{-\sigma-it} \mathcal{M}f(\sigma + it) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma+i\mathbb{R}} x^{-s} \mathcal{M}f(s) ds.$$

On suppose à présent que f est C^∞ à décroissance rapide et continue en l'infini, c'est-à-dire que $x^n f(x)$ est bornée pour tout n . On suppose que les dérivées de f vérifient la même condition, et que f et ses dérivées sont bornées au voisinage de 0.

5. (a) Démontrer que $\mathcal{M}f$ est holomorphe sur la bande infinie $\Re(s) > 0$.

Au voisinage de l'infini, $f(x)x^{s-1}$ est intégrable peu importe s . La seule condition d'intégrabilité restrictive ici est la condition au voisinage de 0 : il faut donc que $\Re(s) > 0$.

- (b) Démontrer que pour $\Re(s) > 0$, on a $\frac{1}{s}\mathcal{M}(f')(s+1) = -\mathcal{M}f(s)$.
 On fait une intégration par parties

$$\int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{s} \int_0^\infty x^{s+1} f'(x) \frac{dx}{x}.$$

- (c) En déduire que $\mathcal{M}f$ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} à pôles simples aux entiers négatifs, avec un résidu de $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ en $-n$.
 On obtient par récurrence

$$\mathcal{M}f(s) = \frac{(-1)^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)} \mathcal{M}(f^{(n)})(s+n)$$

et on peut donc étendre $\mathcal{M}f$ à $\Re(s) > -n$ par cette formule, avec des pôles aux entiers négatifs. Le résidu de $\mathcal{M}f$ en $-n$ est donné par

$$\lim_{s \rightarrow -n} (s+n)\mathcal{M}f(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{-n(1-n)\dots(n-1-n)} \mathcal{M}(f^{(n+1)})(1).$$

On vérifie que le terme devant se simplifie en $-\frac{1}{n!}$, et on calcule

$$\mathcal{M}(f^{(n+1)}) = \int_0^\infty f^{(n+1)}(x) dx = -f^{(n)}(0)$$

ce qui conclut.

Exercice 5. Les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0})^q$, on définit

$${}_pF_q[\mathbf{a}; \mathbf{b} | z] = \sum_{n \geq 0} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{n! \prod_{i=1}^q (b_i)_n} z^n$$

où $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

- Calculer le rayon de convergence de ${}_pF_q$ en fonction de p, q . On pensera à distinguer si $a_i \in \mathbb{Z}$ ou non. Si l'un des a_i est entier négatif, $(a_i)_n = 0$ pour $n > -a_i$, et ${}_pF_q$ est alors un polynôme. Dans le cas contraire, on applique le critère de d'Alembert. Si l'on note $\gamma_n = \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{n! \prod_{i=1}^q (b_i)_n}$, le quotient γ_n/γ_{n+1} est, en vertu de l'équation $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$, donné par

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} = \frac{(n+1)(b_1+n)\dots(b_q+n)}{(a_1+n)\dots(a_p+n)}.$$

On voit clairement que si $p = q + 1$, ce quotient converge vers 1. Si $p > q + 1$, il converge vers 0 et si $p < q + 1$, il diverge vers l'infini. Le rayon de convergence de la fonction hypergéométrique associée est donc 1 si $p = q + 1$, 0 si $p > q + 1$ et ∞ si $p < q + 1$.

- Exprimer les fonctions e^z , $\frac{1}{1-z}$, $-\log(1-z)$, $\int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ avec des fonctions hypergéométriques.

$$\exp(z) = {}_0F_0[z], \quad \frac{1}{1-z} = {}_1F_0[1 | z], \quad -\log(1-z) = {}_2F_1[1, 1; 2 | z].$$

La dernière est légèrement plus délicate à exprimer. Elle s'écrit sous la forme

$$\int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

On peut exprimer $2n+1$ comme $\frac{(3/2)_n}{(1/2)_n}$, et donc

$$\int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta = z {}_1F_1\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \mid z^2\right]$$

3. On pose $\theta_z = z\partial_z$. Démontrer que

$$\theta_z \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^n.$$

C'est une conséquence directe de

$$\partial_z \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}.$$

4. Soient $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Démontrer qu'une série entière $y(z) = \sum a_n z^n$ est solution (formelle) de l'équation différentielle

$$P(\theta_z)y - zQ(\theta_z)y = 0$$

si et seulement si

$$P(n)a_n = Q(n-1)a_{n-1}$$

pour tout $n \geq 0$ (où l'on prend par convention $a_{-1} = 0$). En déduire que ${}_pF_q[\mathbf{a}; \mathbf{b}|z]$ est solution de l'équation différentielle

$$\theta_z(\theta_z + b_1 - 1) \cdots (\theta_z + b_q - 1)y(z) = z(\theta_z + a_1) \cdots (\theta_z + a_p)y(z).$$

Pour le premier claim, il suffit de vérifier que $P(\theta_z) \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} P(n)a_n z^n$.

Par linéarité, il suffit de vérifier que $\theta_z^k \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} n^k a_n z^n$, qui découle de la question précédente. On utilise alors le fait que les coefficients $(\gamma_n)_n$ vérifient

$$n(n + b_1 - 1) \cdots (n + b_q - 1)\gamma_n = (n + a_1 - 1) \cdots (n + a_p - 1)\gamma_{n-1}$$

toujours par la relation $(a)_n = (a + n - 1)(a)_{n-1}$. On applique donc la première partie de la question avec $P(t) = t(t + b_1 - 1) \cdots (t + b_q - 1)$ et $Q(t) = (t + a_1) \cdots (t + a_p)$, et donc pour y la fonction hypergéométrique, on a

$$\theta_z(\theta_z + b_1 - 1) \cdots (\theta_z + b_q - 1)y(z) = z(\theta_z + a_1) \cdots (\theta_z + a_p)y(z).$$

5. Démontrer que

$$(1 - z)^{-\alpha} = {}_1F_0[\alpha | z]$$

et en déduire la formule

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1[a, b; c | z] = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt$$

pour $z \notin \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\Re(c) > \Re(b) > 0$. On rappelle la formule, pour $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$:

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

On pourrait utiliser la formule $(1-z)^{-\alpha} = \exp(-\alpha \log(1-z))$, mais le processus de la développer serait très laborieux. On peut être plus ingénieux. se et remarquer que $y(z) = (1-z)^{-\alpha}$ vérifie $y'(z) = \frac{\alpha}{1-z}y(z)$. En écrivant $y(z) = \sum a_n z^n$, l'équation différentielle se réécrit

$$\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1} - n a_n z^n = \sum_{n \geq 0} \alpha a_n z^n$$

ou encore

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)a_{n+1} - n a_n) z^n = \sum_{n \geq 0} \alpha a_n z^n$$

et donc $(n+1)a_{n+1} - na_n = \alpha a_n$. On vérifie que cette relation de récurrence, avec $a_0 = 1$, donne $a_n = \frac{(\alpha)_n}{n!}$.

On passe à la formule intégrale. On développe en série entière dans l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt &= \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{n!} \left(\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} t^n dt \right) z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{n!} \cdot \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} z^n. \end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le fait que $\Gamma(b+n) = (b)_n \Gamma(b)$ et $\Gamma(c+n) = (c)_n \Gamma(c)$.

6. Démontrer la formule de transformation de Pfaff :

$${}_2F_1[a, b; c | z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left[a, c-b; c \mid \frac{z}{z-1} \right].$$

On calcule

$$\begin{aligned} (1-z)^{-a} \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{c-b-1} \left(1 - \frac{z}{z-1} t \right)^{-a} dt &= \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}(1-z+zt)^{-a} dt \\ &= \int_0^1 (1-u)^{c-b-1} u^{b-1} (1-zu)^{-a} du \end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = 1-t$.

Exercice 6. Fonctions algébriques sur des ouverts.

On dit qu'une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U est algébrique s'il existe un polynôme en deux variables $P(z, X) \in \mathbb{C}[z, X]$ tel que $P(z, f(z)) = 0$. On écrit $P(z, X) = \sum_{i=0}^n P_i(z)X^i$, avec $P_i(z) \in \mathbb{C}[z]$.

1. Soit V un voisinage de 0 et f une fonction algébrique sur $V \setminus \{0\}$. Démontrer que f a au pire un pôle en 0, au pire de l'ordre du zéro de P_n en 0.

Tous les P_i sont bornés au voisinage de 0, disons par C . P_n est minoré au voisinage de 0 par un certain $A|z|^m$. On peut maintenant écrire

$$\begin{aligned} |P_n(z)f(z)^n| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} P_i(z)f(z)^i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |P_i(z)| \cdot |f(z)|^i \\ &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f(z)|^i \\ &\leq C \frac{|f(z)|^n - 1}{|f(z)| - 1} \end{aligned}$$

En minorant $|P_n(z)|$ par $A|z|^m$ et en réarrangeant les termes, on obtient, pour $|f(z)| > 1$ et $|z| \leq 1$:

$$A|z|^m |f(z)|^{n+1} \leq (C+1)|f(z)|^n.$$

En divisant par $|f(z)|^n$, on trouve que $|f|$ est bornée par $\frac{C+1}{A|z|^m}$. Si $|f(z)| \leq 1$, cette borne est vraie dès que z est assez proche de 0, et par conséquent f possède un pôle, d'ordre au plus m , en 0.

2. Soit f une fonction algébrique sur $\mathbb{CP}^1 \setminus S$ avec S un ensemble fini. Démontrer que f est une fonction rationnelle.

f a un pôle au voisinage de tout $a \in S$ par la question précédente. Quitte à multiplier f par un polynôme g , on peut supposer que son seul pôle est à l'infini, et donc gf est un polynôme par le théorème de Liouville, donc f est rationnelle.

On peut pousser ce résultat un peu plus loin, quitte à connaître un peu de choses sur les ordinaux. Soit $X \subseteq \mathbb{CP}^1$ un fermé non-vide au plus dénombrable et f une fonction algébrique définie sur $\mathbb{CP}^1 \setminus X$. On définit X' l'ensemble des points d'accumulation de X .

3. (a) Démontrer que $X' \subsetneq X$ et que X' est fermé dans X .

Il faut ici exploiter la dénombrabilité de X ainsi que le théorème de Baire : comme X est compact, il est complet. Si $x \in X'$, alors $X \setminus \{x\}$ est dense dans X , mais $\bigcap_{x \in X'} X \setminus \{x\} = X \setminus X'$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses, et est donc encore dense par Baire. En particulier, il n'est pas vide (et est même infini si X est infini), et donc $X' \subsetneq X$. Pour la fermeture, c'est tautologique : si une suite (x_n) d'éléments de X' converge vers $x \in X$, soit elle est constante aprc, soit x est un point d'accumulation (de la suite x_n) et il appartient automatiquement à X' .

On définit par récurrence ordinale $X^{(\alpha)}$:

$$\begin{cases} X^{(0)} = X \\ X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})' \\ X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} X^{(\beta)} \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

- (b) Démontrer qu'il existe α ordinal dénombrable tel que $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)} = \emptyset$.

La suite des $X^{(\alpha)}$ est strictement décroissante tant qu'elle ne touche pas le vide, au sens où $\beta < \alpha$ implique que $X^{(\alpha)} \subsetneq X^{(\beta)}$ si X : si α n'est pas limite alors $\alpha = \alpha' + 1$ pour un α' , et on a $X^{(\alpha)} \subsetneq X^{(\alpha')}$ par la question précédente, et $X^{(\alpha')} \subseteq X^{(\beta)}$ par récurrence. Si α est limite, on a $X^{(\alpha)} \subseteq X^{(\beta+1)} \subsetneq X^{(\beta)}$ par définition. On peut à présent fabriquer une injection $\alpha \rightarrow X$ pour chaque ordinal α tel que $X^{(\alpha)}$ n'est pas vide : il suffit d'envoyer $\beta < \alpha$ sur un $x_\beta \in X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)}$ - cette application est clairement injective et bien définie car $X^{(\alpha)} \subseteq X^{(\beta)}$ n'est pas vide.

Si $X^{(\alpha)}$ ne devenait jamais vide, on aurait $\alpha \subseteq X$ pour tout α , ce qui est faux dès que α cesse d'être dénombrable - on en déduit que $X^{(\alpha)} = \emptyset$ pour un certain α , qui doit nécessairement être dénombrable.

- (c) On définit $U_\alpha = \mathbb{CP}^1 \setminus X^{(\alpha)}$. Démontrer que f s'étend en une fonction méromorphe sur U_α pour tout α .

On fait une récurrence ordinale : supposons que l'on a étendu f en une fonction méromorphe f_α sur U_α , on veut l'étendre à $U_{\alpha+1}$. Comme $U_{\alpha+1} \setminus U_\alpha$ est constitué de points isolés, on sait que f_α ne peut avoir au pire que des pôles en ces points isolés, et par conséquent f_α se prolonge en une fonction méromorphe sur $U_{\alpha+1}$. Reste à traiter le cas des ordinaux limite. Puisque pour α limite on a $U_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} U_\beta$, et par récurrence on dispose de f_β méromorphe sur U_β qui étend f , il suffit de définir f_α au voisinage de $z \in U_\alpha$ comme f_β pour β tel que $z \in U_\beta$. On obtient ainsi une fonction méromorphe f_α sur U_α .

- (d) En déduire que f est rationnelle.

On considère α (minimal) tel que $X_\alpha = \emptyset$ - alors, $U_\alpha = \mathbb{CP}^1$ et on a étendu f en une fonction méromorphe sur \mathbb{CP}^1 , donc une fonction rationnelle.

4. Mettre en défaut la rationalité de f si l'on enlève la condition de dénombrabilité sur le compact $X \subseteq \mathbb{CP}^1$.

On peut prendre par exemple $X = \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\}$, qui est un segment compact, et pourtant on peut définir \sqrt{z} sur son complémentaire. En fait, dès que l'on prend pour X une courbe simple reliant a à b , on peut définir $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ sur le complémentaire.

Exercice 7. Théorème des résidus et cohomologie de de Rham.

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , on note $d : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ la dérivée. On définit

$$H_{\text{dR}}^1(U) = \mathcal{O}(U)/d\mathcal{O}(U).$$

1. Rappeler pourquoi $\int_\sigma : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ envoie l'image de d sur zéro. En déduire que \int_σ se factorise en

$$\int_\sigma : H_{\text{dR}}^1(U) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Si $g(z) = f'(z)$, alors pour tout $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ C^1 par morceaux, on a

$$\int_\sigma g(z) dz = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)).$$

Si $\sigma(1) = \sigma(0)$, l'intégrale est donc nulle. La factorisation découle immédiatement de la propriété universelle du quotient.

Détaillons légèrement, on peut définir

$$\int_{\sigma} : [f] \in H_{\text{dR}}^1(U) \mapsto \int_{\sigma} f(z) dz.$$

Si $[f] = [g]$, $f = g + h'$ pour un certain h , et $\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{\sigma} g(z) dz$, donc l'intégrale ne dépend pas du choix d'un représentant !

Pour la suite, on suppose que $U = V \setminus S$ avec S fini et V simplement connexe.

2. Démontrer que l'application $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathbb{C}^S$ donnée par

$$f \mapsto (\text{Res}_s(f))_{s \in S}$$

induit un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$H_{\text{dR}}^1(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^S.$$

Commençons par montrer que l'application est bien définie. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$, on dérive son développement en série de Laurent au voisinage de $s \in S$:

$$d \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - s)^k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k a_k (z - s)^{k-1}.$$

Le coefficient de $(z - s)^{-1}$ dans la dérivée est $0a_0 = 0$, donc la dérivée n'a pas de résidu et le morphisme se factorise bien par $H_{\text{dR}}^1(U)$.

Il faut à présent démontrer deux choses pour avoir l'isomorphisme demandé : une classe dans $H_{\text{dR}}^1(U)$ peut avoir les résidus que l'on veut (surjectivité), et elle est nulle ssi ses résidus sont nuls (injectivité). Le premier point est très simple, il suffit de choisir une fonction rationnelle. Pour le deuxième point, il faut montrer qu'une fonction holomorphe qui a tous ses résidus nuls admet une primitive.

Supposons que f n'a de résidu en aucun point de S , et choisissons $a \in U$: on définit

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta.$$

Il faut vérifier que cette application est bien définie : si α, β sont deux chemins de a à z , le chemin obtenu en concaténant α et $\bar{\beta}$ (β parcouru dans l'autre sens) est un lacet dans $U = V \setminus S$. Comme V est simplement connexe, l'intégrale $\int_{\alpha\bar{\beta}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta - \int_{\beta} f(\zeta) d\zeta$ est une combinaison linéaire de résidus de f aux points de S , et est donc nulle. La fonction F est donc bien définie, et elle est holomorphe (cf TD2).

Ainsi, l'application $f \mapsto (\text{Res}_s(f))_{s \in S}$ a pour noyau précisément $\text{im}(d)$, et elle est surjective. Le premier théorème d'isomorphisme conclut qu'on a

$$H_{\text{dR}}^1(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^S.$$

3. Reformuler le théorème des résidus en terme de cet isomorphisme.

Le théorème des résidus dit que la forme linéaire \int_{σ} sur $H_{\text{dR},S}^1(U)$ s'identifie, par l'isomorphisme de la question précédente, à la forme linéaire

$$(\alpha_s)_{s \in S} \mapsto 2i\pi \sum_{s \in S} \text{Ind}_s(\sigma) \alpha_s$$

sur \mathbb{C}^S .

4. Démontrer que $\sigma \mapsto \int_\sigma$ induit un isomorphisme $H_1(U, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{dR}}^1(U)^*$ (on pourra admettre que tout cycle dans un ouvert de \mathbb{C} est cohomologue à un cycle C^1 par morceaux). Est-ce toujours vrai si l'on suppose que S est discret infini ?

Une description standard de l'homologie de $U \setminus S$ avec U homéomorphe à un plan est que $H_1(U \setminus S, A) \simeq A^S$, et l'isomorphisme est précisément donné par $\sigma \mapsto (\text{Ind}_s(\sigma))_s$. On peut par exemple le voir en calculant le groupe fondamental de $U \setminus S$, qui s'identifie en choisissant des lacets autour des points de S au groupe libre sur S , puis en utilisant le fait que le H_1 à coefficients complexes est le complexifié de l'abélianisé de π_1 . Au vu de la question précédente, cela suffit à conclure.

Dans le cas de S infini discret, le théorème de Mittag-Leffler implique que l'on a toujours un isomorphisme $H_{\text{dR}}^1(U) \simeq \mathbb{C}^S$ car la question 2 reste vraie, mais $H_1(U, \mathbb{C})$ est seulement $\mathbb{C}^{(S)}$, l'espace vectoriel des suites à support fini dans S .